$$[2, diff, y^2, ((f(x, y), x), x)], [2, diff, 2\,x\,y, ((f(x, y), x), y)], [2, diff, 2\,x^2, ((f(x, y), y), y)], [1, diff, -1, (f(x, y), y)]$$

Литература

1. Игнатьев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. лекции для школы по математическому моделированию/ Ю.Г. Игнатьев. – Казань: Казанский университет, 2014. – 298 с.

2. Голоскоков Д.П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple. Учебник для вузов/ Д.П. Голоскоков. – СПб: Питер, 2004. – 539 с.

3. Кирсанов М.Н. Maple и Maplet. Решения задач механики. Учебное пособие/ М.Н. Кирсанов. – СПб: Лань, 2012. – 512 с.

RECOGNITION OF THE COEFFICIENTS OF A DIFFERENTIAL EQUATION OF AN ARBITRARY ORDER IN PARTIAL DERIVATIVES IN THE CAS MAPLE

G.A. Rakhimova

The possibilities of applied mathematical package Maple are described in the study of partial differential equations of the arbitary order.

Keywords: Computer Mathematics System, procedure, differential equations.

УДК 519.688, 511.174

УТОЧНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ МЕРТЕНСА О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ ФУНКЦИИ ЭЙЛЕРА

А.В. Рожков[1]

1 *ros.seminar@bk.ru*; Кубанский государственный университет

Проведены обширные вычисления, уточняющие известную теорему Мертенса о среднем значении функции Эйлера. Получены новые неожиданные результаты.

Ключевые слова: компьютерная алгебра, операционные системы, языки программирования, теория чисел.

Устоявшаяся модель образования — теория — упражнения — практика, сейчас мало продуктивна в областях, связанных с высокими технологиями. Технологии меняются очень быстро, а образование очень медленно. С одной стороны это хорошо — не прерывается связь времен. А с другой, юные хакеры, иногда даже не освоившие алфавит и таблицу умножения, маугли компьютерных джунглей, вскрывают супермудрые системы защиты.

Очень не вредно совмещать эти три категории — теория — упражнения — практика. Осваивая математические определения, попутно, увидеть и между делом освоить, как эти понятия реализованы в алгоритмах. Математику осваивать на понятных примерах, попутно изучить индустриальный язык программирования, и между делом впитывать ауру окружения — открытого программного окружения и мира Linux.

В этом и есть смысл DPS-стратегии — Debian - Python - Sage. Эту стратегию развивают, на уровне отдельных дисциплин, многие университеты из первой сотни, иногда, правда, заменяя Python но Julia — новый (2012 г.) язык программирования, ориентированный на распределенные математические вычисления. В РФ связку Debian - Python - Sage активно использует кафедра высшей алгебры МГУ им. М.В. Ломоносова.

Данная работа является прямым продолжением и развитием работ [1], [2], [3].

1. Сферы применения DPS платформы

Первоначально [1] все задумывалось с достаточно прозаической целью — как источник для написания "Курсовых работ, дипломных проектов, магистерских и кандидатских диссертаций".

По мере реализации проекта стало ясно, что технология может использоваться для создания "Startup, разработки комплексов программ как в области научного так и прикладного программирования".

Какие проекты научного и учебного направления можно реализовывать в рамках данной программной платформы?

На момент написания статьи (сентябрь 2017 г.) в Кубанском государственном университете заявлено более 200 тем, связанных с компьютерной алгеброй, теорией чисел, абстрактной алгеброй и компьютерной безопасностью.

Вот некоторые из числа предложенных задач.

1. Численные эксперименты для нахождения подходов к решению проблемы Коллатца (1937 г.) Например, проверки того, что длина цепочки, начинающейся с нечетного числа n, если отбросить четные члены, не превышает $log_{4/3} n$.

2. Численные эксперименты с распределением простых чисел на прямой. *Плотная n-ка - это n простых чисел, расположенных на отрезке минимально возможной длины.* Рожков А.В. ввел плотные n-ки в 2012 г. Оказалось, что в 1999 г. под названием k-tuplet их ввел T.Forbes. Поиском плотных n-к сейчас занимаются сотни людей в разных странах мира, часто с использованием суперкомпьютеров. В 2016 г. найдены первые плотные n-ки для $n = 21$. Если будут найдены плотные n-ки для $n = 447$, то будет опровергнута знаменитая гипотеза Hardy-Littlewood о распределении простых чисел. То есть будет доказано, что где-то там, очень далеко от начала координат, существует математическая страна El Dorado, где простые числа встречаются чаще, чем в начале координат!

3. Вычисления в области алгебры с условиями конечности. Например, вычисления характеристик Бернсайдовых групп, где есть много нерешенных проблем [4] и др.

Визуализация

В процессе вычислений было получено много промежуточных данных и потребовалась программа для работы с графиками. Была выбрана бесплатная программа SciDAVis — официальный сайт http://scidavis.sourceforge.net. SciDAVis — система анализа, обработки, визуализации экспериментальных данных и аппроксимации кривых. Поддерживает значительное количество аппроксимирующих функций, скрипты, базовые статистики с графиками и визуализацией и многое другое. Один из наиболее полнофункциональных и удобных аналогов коммерческого OriginPro. SciDAVis предназначена для построения 2D и 3D-графиков различных типов: линейных, точечных, трёхмерных гистограмм, объёмных круговых гистограмм, трёхмерных поверхностей. Исходные данные могут быть импортированы из ASCII-файлов, введены вручную или вычислены по формулам.

2. Функция Эйлера

Определение. *Функцией Эйлера называется количество натуральных чисел меньших n, и не имеющих с n неединичных общих делителей.*

Функцию Эйлера легко вычислить, если знать список всех разных простых чисел $\{p, q, ..., r\}$, которые делят число n. В этом случае

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{q}\right) \cdot ... \cdot \left(1 - \frac{1}{r}\right).$$

Введем среднее значение функции Эйлера

$$\overline{\phi(n)} = [\phi(1) + \phi(2) + ... + \phi(n)]/n.$$

Поскольку простые числа на числовой кривой разбросаны весьма хаотично, то и значения функции Эйлера, и, естественно, ее среднее значение, изменяются непредсказуемо. Вторая проблема, чисто вычислительная, это высокая ресурсоёмкость задачи разложения на простые множители. Хорошо известно приближение для среднего значения функции Эйлера, формула Мертенса [5]:

$$n \cdot \overline{\phi(n)} = t \cdot n^2 + O(n \ln(n)), t = 3/\pi^2.$$

Мы будем изучать следующее приближение, существенно уточняющее формулу Мертенса

$$\overline{\phi(n)} \approx t(n+1), \pi = 3,141592653589793.$$

Именно такое приближенное значение числа π — до 15 знака, мы использовали в своих вычислениях.

Положим

$$s_n = \overline{\phi(n)} - t(n+1).$$

Тогда $s_1 = 1$, $s_2 = 1 - 2t$, где $t = 3/\pi^2 \approx 0,303964$ и

$$s_{n+1} = \frac{n}{n+1} s_n + \frac{\phi(n+1)}{n+1} - 2t.$$

Растет ли последовательность s_n до бесконечности, положительной или отрицательной, стремится ли к какому-то пределу или колеблется в районе нуля. Собственно, здесь теоретическая математика заканчивается и начинается математика экспериментальная. Вычисления проводились в пакете алгебры на открытом gap4r8p8 — официальный сайт http://www.gap-system.org, в ней функцию Эйлера вычисляет команда Phi(n).

Функция s_n была нами численно исследована на отрезке от 1 до 20 млрд., что заняло пять месяцев непрерывных вычислений на процессоре Intel Core i5 4430 с производительностью примерно 50 Гфлопс.

Получились следующие результаты:

1. Функция s_n не периодическая, принимает положительные и отрицательные значения, принадлежащие интервалу длины 1, точнее $|s_n| < 0.44$.

Более того, только одно число из 3 млн. попадает в интервал $0.39 < |s_n| < 0.4$, при этом положительных чисел 49%;

одно число из 20 млн. попадает в интервал $0.4 < |s_n| < 0.41$, при этом положительных чисел 49%;

одно число из 123 млн. попадает в интервал $0.41 < |s_n| < 0.42$, при этом положительных чисел 46%;

одно число из 1300 млн. попадает в интервал $0.42 < |s_n| < 0.43$, при этом положительных чисел 40%;

одно число из 10 млрд. попадает в интервал $0.43 < |s_n| < 0.44$, чисел всего 2 — одно из них положительное.

2. Среднее значение числа s_n, т.е. ее матожидание, если рассматривать s_n как случайную величину, стремится к 0, точнее, не превосходит $2 * 10^{-7}$.

3. Дисперция случайной величины s_n равна примерно 0.01986

4. Плотность распределения вероятностей значений случайной величины s_n в сравнении ее с нормальным распределением для матожидания 0 и дисперсии 0.01986 приведена на Рис. 1.

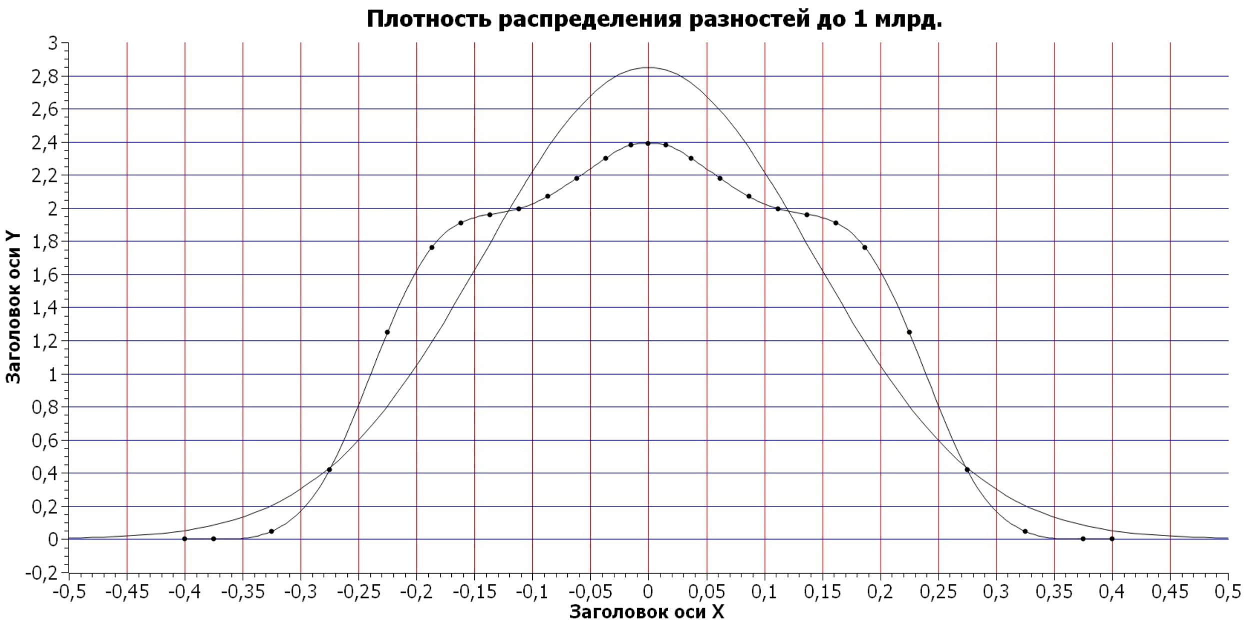

Рис. 1. Плотность распределение вероятностей случайной величины s_n

Поражает абсолютно неожиданная и очень точная (до 0,001) симметричность плотности распределения и то, что 80% значений функции s_n принадлежат интервалу $(-0,2; 0,2)$.

Однако оценить глобальное поведение последовательности s_n крайне затруднительно. Построение ее графика даже по нескольким тысячам точек ничего не да-

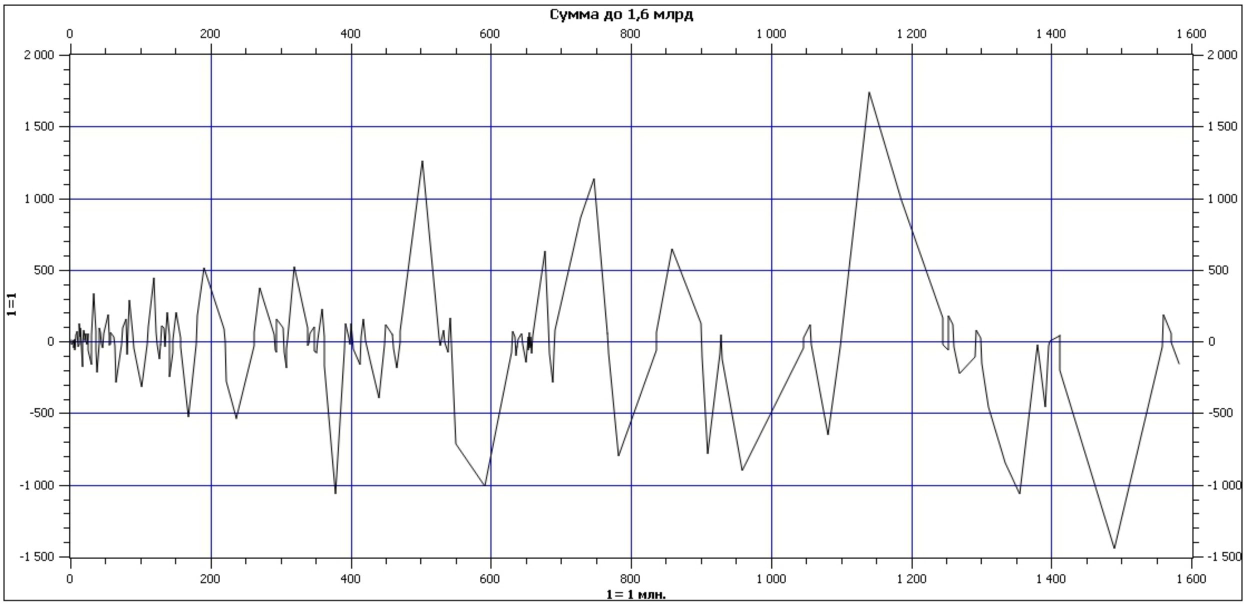

Рис. 2. График суммы S_n от 0 до 1,6 млрд.

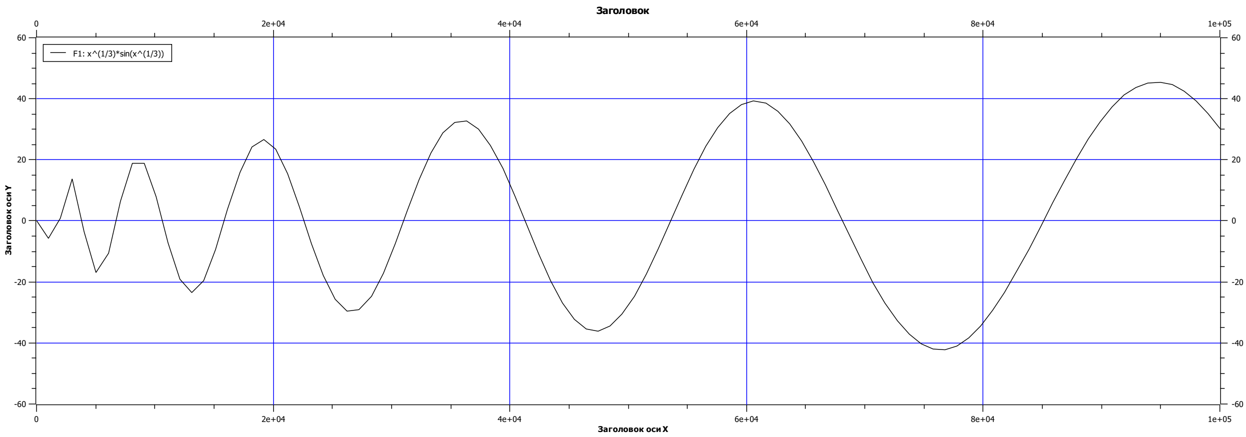

Рис. 3. График функции $\sqrt[3]{x}\sin(\sqrt[3]{x})$

ет. Последовательность s_n хаотически изменяется вблизи нуля, не позволяя выдвинуть никаких разумных гипотез о ее поведении.

Чтобы изучить ее глобальное поведение, из маленьких пошаговых изменений получить большие сдвиги, изучим частичные суммы этой последовательности,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} s_i.$$

Вычисления производились на отрезке $[1;20*10^9]$ и результаты тоже оказались абсолютно неожиданными.

На отрезке $[1;1,6*10^9]$ поведение функции S_n иллюстрируется Рис.2 качественно напоминает поведение функции $\sqrt[3]{x}\sin(\sqrt[3]{x})$, период увеличивается, а амплитуда растет, что и демонстрирует Рис.3.

Чем объясняется такое поведение функции S_n? Прежде всего тем, что чем дальше от начала координат, тем длиннее промежутки, где функция S_n не меняет знак.

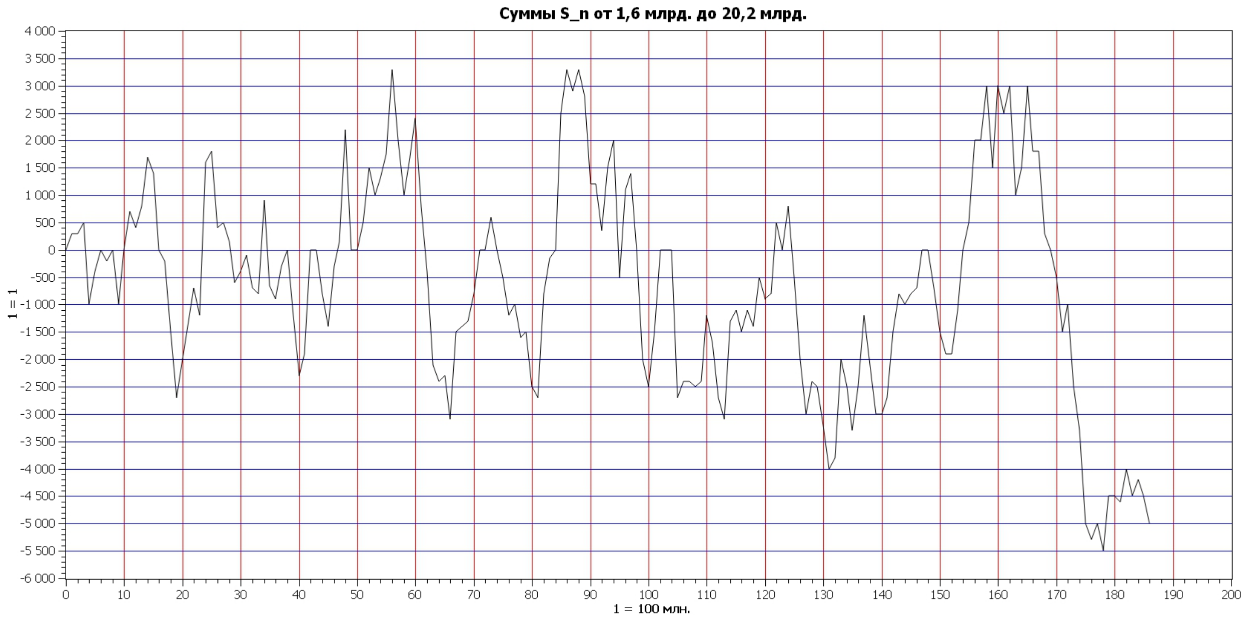

Рис. 4. График суммы S_n от 1,6 млрд. до 20,2 млрд.

Как показали вычисления, даже в пределах отрезка до миллиарда, есть промежутки в сотни тысяч подряд идущих чисел, где функция S_n не меняет знак. Именно на этих промежутках функция S_n или растет до локального максимума, либо уменьшается до локального минимума.

Есть также весьма обширные промежутки, где функция S_n буквально на каждом шаге меняет знак, т.е. изменяется максимально сильно.

Функция Эйлера принимает максимальные значения на простых числах, значит и функция S_n меняется скачкообразно в районе нуля там где много простых чисел, где находится их сгущения. Переход функции S_n в минус означает, что в этих же промежутках экстремально много чисел, имеющих много различных простых делителей. Формула Мертенса говорит о том, что наугад взятое натуральное число в среднем делится на 6 и еще на какое-то простое число. Рис. 2 нам подсказывает, что например, в интервале от 650 млн. до 700 млн. экстремально много простых чисел и чисел, имеющих очень много разных простых делителей.

На Рис. 4 показано поведение функции S_n на промежутке (1,6ìëðä; 20,2ìëðä). На этом графике 1 = 100 млн. Качественно ничего не изменилось - так же растет период и амплитуда волны.

Данные вопросы (сгущения простых чисел) важны для криптографии и будут исследованы нами в другой работе.

Взятие интеграла, т.е. функции S_n, позволило нам оценить глобальное поведение функции s_n. Однако такие промежутки, как упомянутый выше интервал $(65*10^7;7*10^8)$, где даже интеграл изменяется в районе нуля, требует новых средств для исследования. И такое средство есть. Это второй интеграл — математическое ожидание значения суммы S_n

$$SS_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_i.$$

Результаты на отрезке $[1; 20,2 * 10^9]$ приведены на Рис.5

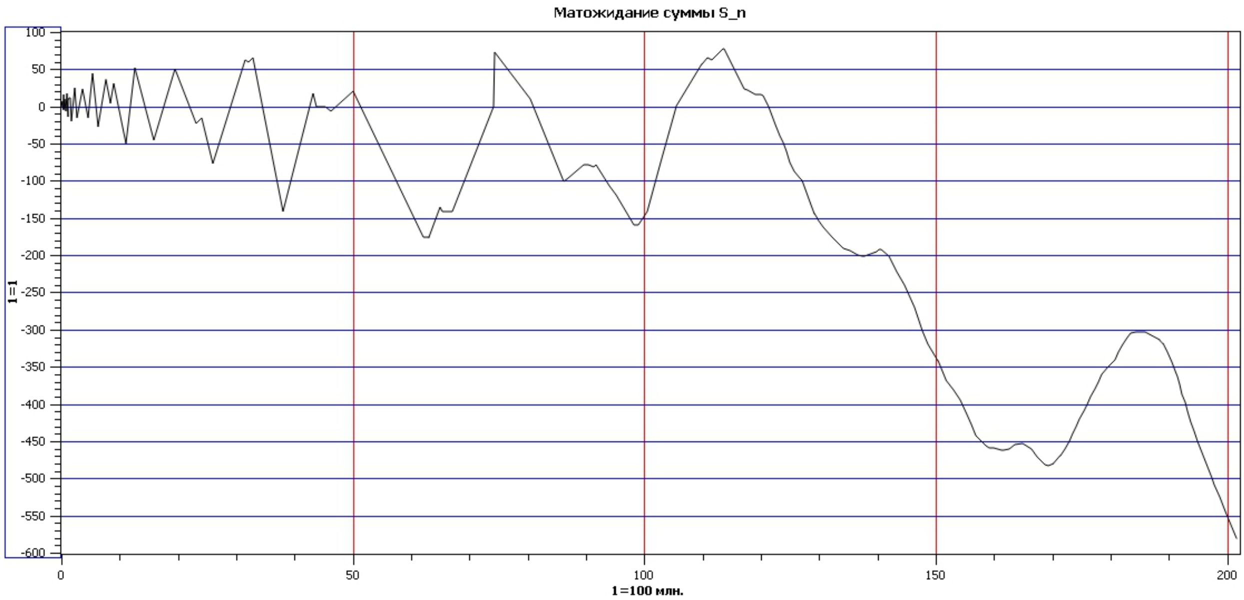

Рис. 5. Математическое ожидание суммы S_n

Заключение

Данные изыскания и не противоречат и не опровергают теорему Мертенса, а довольно сильно ее уточняют.

Дело в том, что $O(\ln(n))$ означает лишь , что начиная с какого места модуль добавки к основному члену $t(n+1)$, не может быть больше, чем логарифм, умноженный на какое-то положительное число "c". А если добавка нулевая, то это и возможно и во всех смыслах хорошо

Возможно, оценка в теореме Мертенса слишком грубая. Но аналитически можно доказать про добавку, что она не больше $\ln\ln(n)$ или $\ln\ln\ln(n)$ и т.д., но полностью от логарифма вряд ли удастся избавиться, поскольку он входит в закон глобального распределения простых чисел $n/\ln(n)$.

Поэтому единственный путь найти точную оценку — прямые вычисления.

Теорема. *При $n < 202 * 10^8$ имеет место неравенство*

$$|\overline{\phi(n)} - 3(n+1)/\pi^2| < 0.44.$$

Исследовать эту задачу предложил к.ф.-м.н., доцент КубГУ Сергеев Эдуард Александрович, за что ему сердечная благодарность.

Литература

1. Рожков А.В., Рожкова М.В. Преподавание математики и информатики в ведущих университетах мира и опыт КубГУ / А.В. Рожков, М.В. Рожкова // Университеты в системе поиска и поддержки математически одаренных детей и молодежи: материалы I Всероссийской научно-практической конференции. – Майкоп, 2015. – С. 116–121.

2. Рожков А.В. Стратегия DPS - Debian-Python-Sage: Проблемно-ориентированные вычислительные среды на открытом коде / А.В. Рожков. Информационные технологии в образовании и науке - ИТОН 2016: материалы международной научно-практической конференции. – Казань: КФУ, 2016. – С. 172–179.

3. Рожков А.В., Рожкова М.В. Экспериментальная (вычислительная) теория чисел / А.В. Рожков, М.В. Рожкова // Новые информационные технологии в образовании и науке: материалы X междунар. науч.-практ. конф., Екатеринбург: Рос. гос. проф.-пед. ун-т, 2017. – С. 413–417.

4. Рожков А.В. О подгруппах некоторых групп Алёшинского типа / А.В. Рожков // Алгебра и логика. – 1986. – Т. 25. – № 6. – С. 643–671.

5. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел / К. Чандрасекхаран. — М.: Мир, 1974. — 178 с.

SPECIFICATION OF THE THEOREM OF MERTENS OF MEAN VALUE OF FUNCTION EULER

A.V. Rozhkov

The extensive calculations specifying the known theorem of Mertens of mean value of function Euler are carried out. New unexpected results are received.

Keywords: computer algebra, operating systems, programming languages, number theory.

УДК 519.688, 511.174

СУММА ЦИФР ФАКТОРИАЛА

А.В. Рожков[1], Н.В. Потапова[2]

1 *ros.seminar@bk.ru*; Кубанский государственный университет
2 *potapova50@gmail.com*; Кубанский государственный университет

Выдвинута гипотеза, аналогичная формуле Стирлинга, но только не для факториала, а для его суммы цифр. Гипотеза проверена для всех чисел меньших миллиона

Ключевые слова: компьютерная алгебра, операционные системы, языки программирования, теория чисел.

DPS-стратегии — Debian - Python - Sage — операционная система на открытом коде, язык программирования, доступный для всех, пакет компьютерной алгебры на открытом коде. Эту стратегию развивают, на уровне отдельных дисциплин, многие университеты из первой сотни, иногда, правда, заменяя Python но Julia — новый (2012 г.) язык программирования, ориентированный на распределенные математические вычисления. В РФ связку Debian - Python - Sage активно использует кафедра высшей алгебры МГУ им. М.В. Ломоносова.

Данная работа является прямым продолжением и развитием работ [1], [2], [3].

1. Сферы применения DPS платформы

Первоначально [1] все задумывалось с достаточно прозаической целью — как источник для написания "Курсовых работ, дипломных проектов, магистерских и кандидатских диссертаций".